

06

Teorías dinámicas del campo electromagnético

Una vez definidos los potenciales electromagnéticos, el primer par de ecuaciones cinemáticas de Maxwell no son más que una consecuencia de la definición del campo eléctrico y magnético en función de los potenciales, que son los que determinan la ecuación de movimiento de la materia por lo que deben ser considerados como magnitudes fundamentales.

Al principio del desarrollo del electromagnetismo surgió el debate de si los potenciales eran solamente una magnitud auxiliar matemática, sin realidad física, pues según el electromagnetismo clásico no son directamente observables, ya que en la ecuación de la fuerza de Lorentz que determina la interacción de la materia con los campos sólo aparecen los campos eléctrico y magnético. Esta incertidumbre quedó resuelta mediante la mecánica cuántica por Aharon-Böhm, al demostrar que hay efectos cuánticos medibles en casos en los que no hay campo eléctrico y magnético, pero si existe un campo de potencial vector magnético.

Comprobaremos que la estructura del segundo par de las ecuaciones de Maxwell puede ser derivada también por argumentos dinámicos clásicos de geometría vectorial. Aquí juega un papel importante, aunque implícito en el análisis, que nuestro mundo físico tiene tres dimensiones y que nos movemos en una geometría euclidiana.

También veremos, como consecuencia del análisis efectuado, que libertad tenemos de elegir los sistemas de unidades del electromagnetismo.

Aunque las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético en su forma clásica vienen encapsuladas con un principio variacional, sin embargo, la forma de interacción del campo con las cargas es una hipótesis asumida. Por ello Helmholtz y

Lipschitz analizaron de forma general que tipos de fuerzas de interacción son las que conservan la energía mecánica viendo que estas debían ser de la forma de Lorentz; sin embargo, Feynman y Dyson plantearon si no existiría alguna otra fuerza fundamental que explicara clásicamente la forma de la interacción electromagnética y cuales serían las relaciones de conmutación desde el punto de vista clásico.

Partiendo simplemente de argumentos de la mecánica clásica, veremos que es posible determinar las restricciones estructurales de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y, en especial de la fuerza de Lorentz, que determina la interacción de las cargas con el campo electromagnético.

Veremos también que las formas diferenciales exteriores desarrolladas por Cartan dan una formulación alternativa muy compacta de las ecuaciones del electromagnetismo y de sus relaciones estructurales, que permiten derivar de una forma natural los principios de conservación local de la carga y de la energía, así como los invariantes de Lorentz asociados con el campo electromagnético.

Relaciones estructurales de las ecuaciones cinemáticas de Maxwell

De los principios variacionales se deduce que las ecuaciones de Maxwell se pueden agrupar en dos pares estructuralmente diferentes.

Vimos que el primer par de las ecuaciones cinemáticas de Maxwell eran consecuencia de la variación de la acción procedente de la lagrangiana de la materia y de su interacción con el campo electromagnético respecto a la coordenadas, que resultaba en la ecuación dinámica para la fuerza de Lorentz, y en la definición de unos campos eléctricos y de inducción magnética en función de los potenciales

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Como consecuencia de las ecuaciones de definición se verifica de forma inmediata las ecuaciones cinemáticas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sin embargo, debido a que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \equiv 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \equiv 0$, los potenciales están indeterminados por una transformación gauge que deja invariante los vectores del campo electromagnético. Una transformación gauge

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

deja invariante el campo electromagnético $\vec{E}$ y $\vec{B}$ ya que

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi' = \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{B}$$

De las anteriores propias definiciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función de los potenciales, resulta que también son invariantes ante una transformación gauge las dos primeras ecuaciones cinemáticas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}' = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' = -\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t}$$

Las transformaciones gauge de los potenciales son en realidad equivalente a sumar una diferencial exacta a la lagrangiana de forma que la variación de la integral de la acción es invariante y, por tanto, las ecuaciones del campo electromagnético permanecen inalteradas

$$L \rightarrow L' = L + q \frac{d\Lambda}{dt} = L + q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\Lambda + \frac{\partial\Lambda}{\partial t})$$

En efecto, vimos que para una partícula que interacciona con un campo electromagnético, su lagrangiana antes y después de la transformación se puede escribir de la forma

$$L = L_m + L_c + q(\vec{v} \cdot \vec{A} - \phi) \rightarrow L_m + L_c + q(\vec{v} \cdot \vec{A}' - \phi')$$

y para que sea invariante, deberá cumplirse las relaciones de transformación gauge

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

Restricciones estructurales de las ecuaciones dinámicas de Maxwell como consecuencia de las ecuaciones cinemáticas

El segundo par dinámico de las ecuaciones de Maxwell se deducían de la variación de la acción procedente de la lagrangiana del campo electromagnético libre y de su interacción con la materia respecto a los potenciales

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Una vez dados los potenciales, el primer par de ecuaciones cinemáticas no es más que una consecuencia de la definición del campo eléctrico y magnético en función de los

potenciales, que son los que determinan la ecuación de movimiento de la materia, y que debe ser tomado en como magnitud fundamental.

Comprobaremos ahora que la estructura del segundo par de ecuaciones dinámicas de Maxwell puede ser derivada por argumentos clásicos de análisis vectorial.

Marsh parte de la hipótesis de la validez del teorema de Helmholtz para campos estacionarios, considerando que para cada instante de tiempo permanece válido el principio de que toda función vectorial de campo está totalmente determinada si conocemos su divergencia y su rotacional para unas condiciones de contorno adecuadas. Debe observarse que las magnitudes que figuran ecuaciones de Maxwell no tienen una relación causal directa entre ellas al estar solo fijadas para un instante de tiempo fijado, como analizaremos en detalle en las teorías de causalidad. La validez de la hipótesis asumida veremos que requiere imponer restricciones adicionales como la conservación local de la carga y que se cumplan las ecuaciones cinemáticas.

Como el rotacional de $\vec{E}$ está fijado por las ecuaciones cinemáticas que son consecuencia de las propias definiciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función de los potenciales, podemos suponer que su divergencia viene dada por una expresión de la forma similar a la ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = C_1 \rho(\vec{x}, t)$$

donde C_1 es una constante, y $\rho(\vec{x}, t)$ es una función todavía por determinar, que es gauge invariante al serlo $\vec{E}$, y que más adelante veremos que se identifica con la densidad de carga.

Derivando la anterior ecuación respecto a t , obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{C_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

que es equivalente a una ecuación de continuidad local. Definiremos por analogía un vector corriente $\vec{J}$ que satisfaga la anterior ecuación de continuidad y que será también gauge invariante al serlo ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

y cuya expresión más general será

$$\vec{J} = -\frac{1}{C_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + C_2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

donde $\vec{B}$ es un campo vectorial gauge invariante, al serlo los otros términos de la ecuación, que podemos asimilar con el campo magnético.

La anterior ecuación se puede reescribir entonces de la forma

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{C_2} \vec{J} + \frac{1}{C_2 C_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

que junto con

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = C_1 \rho(\vec{x}, t)$$

definen unas ecuaciones similares al segundo par de ecuaciones de Maxwell para las leyes de Gauss y de Ampère.

Evidentemente deberá ser la velocidad de la luz

$$c = \sqrt{C_2 C_1}$$

y en el sistema internacional de unidades

$$C_1 = 1/\epsilon_0$$

$$C_2 = 1/\mu_0$$

Por tanto, la forma estructural del segundo par de ecuaciones dinámicas de Maxwell queda determinada por la relación estructural de primer par de ecuaciones cinemáticas.

Además, el segundo par cinemático se puede considerar como una restricción del campo en función de las fuentes que debe cumplirse para todo tiempo.

Tomando la divergencia de la ecuación dinámica de la corriente de Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

se obtiene la ley de la conservación local de la carga

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La ecuación de la conservación de la carga está contenida implícitamente en las ecuaciones dinámicas de Maxwell de las leyes de Ampère y de Gauss y es una consecuencia de ellas, y según esto, no debe ser considerada como una ecuación independiente de ellas.

Restricciones estructurales de las ecuaciones dinámicas de Maxwell como consecuencia de los principio de conservación

Ya vimos en teorías vectoriales, que el principio de la conservación de la energía estaba contenido implícitamente en el segundo para de ecuaciones dinámicas de Maxwell. Sin embargo, algunos autores prefieren considerar el principio de conservación de la energía como el fundamental, y a partir del mismo deducir como este principio condiciona la estructura de la ecuaciones de Maxwell.

Según Planck, el campo electromagnético determinado por $\vec{E}$, $\vec{B}$ debe tener asociada una energía que permita su detección experimentalmente cuando interacciona con la materia. En base a esta idea, desarrolló su teoría del campo electromagnético a partir sólo del principio de la conservación de la energía y del principio de la acción contigua.

Planck postuló que el intercambio de energía en cada punto del espacio sólo se produce con el medio de su entorno a través de un flujo de energía definido por

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

La densidad de volumen de la energía en el vacío viene expresada por

$$w = \frac{1}{2}(\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2)$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son las variables de campo que se pueden determinar mediante balances energéticos. Las constantes dieléctrica ϵ y de permitividad μ son las que determinan las propiedades eléctricas y magnéticas en un medio homogéneo.

Supuso que la variación de energía eléctrica por unidad de tiempo y volumen $\frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 * \frac{2}{\tau_r}$ es igual a la energía disipada por efecto Joule $\sigma \vec{E}^2$, donde τ_r es el tiempo de relajación del medio y σ su conductividad.

Con estas hipótesis, Planck estableció que se debía cumplir la ecuación local de la energía

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} + \sigma \vec{E}^2 = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{div } \vec{S} + \sigma \vec{E}^2 = 0$$

Para obtener las seis ecuaciones necesarias para determinar $\vec{E}$ y $\vec{H}$, supuso que deben anularse los factores que multiplican cada componente de los campos en la anterior ecuación, con lo que llegó a las ecuaciones fundamentales de Maxwell para un medio homogéneo

$$\frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \sigma \vec{E}$$

$$\frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

Con la hipótesis de que el flujo de energía debe tener el mismo valor al atravesar dos medios materiales diferentes, demostró que las componente tangenciales de $\vec{E}$ y $\vec{H}$ deben permanecer constantes al atravesar la superficie de separación.

Según Kobe el principio de conservación de la energía es el que condiciona como debe ser la estructura de las ecuaciones del campo electromagnético.

El acoplamiento del campo electromagnético con la materia cargada es a través del término $\vec{E} \cdot \vec{j}$ el que determina la densidad local de energía por unidad de tiempo transferida del campo a la materia cargada.

Si la energía total del campo y de la materia se conserva localmente se verificará la ecuación local de la conservación total de la energía

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

siendo

$$w = w_p + w_c$$

$$\vec{S} = \vec{S}_p + \vec{S}_c$$

donde el subíndice m se refiere a la materia o partícula y m al campo electromagnético.

La anterior ecuación de conservación se puede descomponer en otras dos correspondientes al campo electromagnético y la materia acopladas a través del término de transferencia de energía

La ecuación de conservación de energía para del campo electromagnético acoplado con la materia se puede escribir de la forma

$$\frac{\partial w_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c = -w_j$$

siendo w_{sc} el sumidero de energía del campo electromagnético

Si se impone la condición de la conservación local de la energía total que se toma como un postulado adicional, entonces la energía que pierde el campo electromagnético debe ser igual a la que absorbe la partícula cargada por lo que la ecuación de conservación de energía para la materia acoplada con el campo electromagnético será

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_m = w_J$$

donde $\vec{S}_p$ desempeña el papel de un flujo de energía de materia y w_J es el término fuente de energía.

Para el campo electromagnético $\vec{E}, \vec{B}$, el único escalar observable para una densidad de energía que se puede formar que sea invariante en una transformación gauge es

$$w_c = C_{ce}\vec{E}^2 + C_{cb}\vec{B}^2 + C_{eb}\vec{E} \cdot \vec{B}$$

De igual forma la única forma bilineal que se puede formar para el flujo de energía es

$$\vec{S}_c = C_{cs}\vec{E} \wedge \vec{B}$$

y la forma más simple para un término de sumidero de energía es

$$w_J = C_{je}\vec{E} \cdot \vec{J} + C_{jb}\vec{B} \cdot \vec{J}$$

La ecuación de conservación para el campo electromagnético

$$\frac{\partial w_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_c = -w_J$$

es equivalente a la ecuación

$$\vec{E} \cdot (2C_{ce}\partial_t\vec{E} + C_{eb}\partial_t\vec{B} - C_{cs}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} + C_{je}\vec{J}) + \vec{B} \cdot (2C_{cb}\partial_t\vec{B} + C_{eb}\partial_t\vec{E} + C_{cs}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + C_{jb}\vec{J}) = 0$$

habiéndose hecho uso de la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

La anterior ecuación implica que puesto que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son distintos de cero, debe cumplirse

$$2C_{ce}\partial_t\vec{E} + C_{eb}\partial_t\vec{B} - C_{cs}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} + C_{je}\vec{J} \equiv 0 \quad (*)$$

$$2C_{cb}\partial_t\vec{B} + C_{eb}\partial_t\vec{E} + C_{cs}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + C_{jb}\vec{J} \equiv 0 \quad (**)$$

Si en ecuación (**) del anterior par sustituimos $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ por $-\partial_t\vec{B}$ cuya identidad ya fue anteriormente demostrada, obtenemos

$$(2C_{cb} - C_{cs})\partial_t\vec{B} + C_{eb}\partial_t\vec{E} + C_{jb}\vec{J} = 0 \quad (***)$$

En situaciones estacionarias será $\partial_t\vec{E} = \partial_t\vec{B} = 0$ y como $\vec{J}$ en general no es nulo deberá ser

$$C_{jb} \equiv 0$$

y por tanto

$$w_J = C_{je} \vec{E} \cdot \vec{J}$$

lo que indica que el término $\vec{B}$ no contribuye a la fuente de energía w_J y, por tanto, el campo magnético no transfiere energía a la partícula cargada, la cual ni gana ni pierde energía al moverse sólo en un campo magnético, lo que es bien conocido por la electrodinámica clásica.

Si se toma la divergencia de la última ecuación, se obtiene

$$(2C_{cb} - C_{cs}) \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + C_{eb} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + C_{jb} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow C_{eb} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Tomando la divergencia de la ecuación (*) obtenemos

$$2C_{ce} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + C_{eb} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - C_{cs} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + C_{je} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \equiv 0 \Rightarrow 2C_{ce} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + C_{je} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Por la continuidad de la carga $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho$ es no nulo, y como es $C_{je} = -1$, si $\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E} / \partial t$ es no nulo, deberá ser entonces

$$C_{eb} \equiv 0$$

lo que nos indica que la densidad de energía del campo electromagnético w_c no tiene un término cruzado del tipo $\vec{E} \cdot \vec{B}$.

Ya que $\partial_t \vec{B}$ es no nulo, la anterior ecuación (***) implica que también deberá ser

$$2C_{cb} - C_{cs} \equiv 0$$

De la última ecuación obtenida se tiene la expresión

$$0 = 2C_{ce} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - C_{je} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 2C_{ce} \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + C_{je} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que una vez integrada en el tiempo, nos da la ecuación de la ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{2C_{ce}}$$

De la ecuación (*) se deduce la ecuación de ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{2C_{ce}}{C_{cs}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{C_{je}}{C_{cs}} \vec{J}$$

Tanto C_{ce} , C_{cs} son constantes que dependen del sistema de unidades utilizado.

Es fácil comprobar que para que existan ondas electromagnéticas que se propaguen con una velocidad c deberá ser además

$$c^2 = \frac{C_{cs}}{2C_{ce}}$$

En el sistema internacional de unidades SI será

$$2C_{ce} = \epsilon_0 \quad 2C_{cb} = \frac{1}{\mu_0}$$

$$C_{cs} = \frac{1}{\mu_0} \quad C_{je} = 1$$

Relaciones estructurales internas de las ecuaciones de Maxwell

Las propias ecuaciones de Maxwell limitan la estructura entre ellas. Incluso si las consideramos solo como un resultado experimental, se puede extraer algunas conclusiones de interés de sus relaciones estructurales entre ellas.

La propia ecuación cinemática de la ley de Faraday ya implica que la divergencia de $\vec{B}$ no puede depender del tiempo. Tomando la divergencia de ella, obtenemos

$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv \beta(\vec{x})$$

donde $\beta(\vec{x})$ es una función independiente del tiempo.

Es importante observar, que de la anterior ecuación solo se concluye que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ no depende del tiempo.

El que sea la divergencia de $\vec{B}$ idénticamente nula y $\beta(\vec{x}) \equiv 0$, y por tanto $\vec{B}_T \equiv 0$, es un hecho que solo experimentalmente se puede corroborar.

Si considerásemos solo la ecuación para ley de Ampère, de su divergencia solo podríamos concluir que

$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_T)}{\partial t} \right)$$

y por tanto, al anularse la divergencia, debe existir una función cuyo rotacional cumpla

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

Si suponemos adicionalmente que la ecuación de la conservación local de la carga es una ley universal fundamental, entonces se verifica

$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho)$$

y por consiguiente, solo podemos concluir que

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho = \alpha(\vec{x})$$

donde $\alpha(\vec{x})$ es una función independiente del tiempo. El que sea $\alpha(\vec{x}) \equiv 0$ y se cumpla la ley de Gauss sería en este caso un hecho solo comprobable experimentalmente.

Uno de los mayores logros de Maxwell, fue la introducción de la corriente de desplazamiento aunque ha sufrido múltiples reinterpretaciones posteriores. Si bien con su modelo mecanicista ya intuyó su existencia, la introdujo porque consideró que debía existir una simetría en las ecuaciones para el campo eléctrico y magnético y, también, a consideraciones de continuidad de las corrientes.

Es bien sabido que en un conductor con una corriente variable que tenga un condensador, si se aplica la ley de Ampère a una circulación alrededor del conductor, la integral $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ dará como resultado μ_0 por la intensidad si a la superficie S la atraviesa el conductor, o cero si S pasa entre las placas del condensador sin tocar el conductor.

Hay otra forma de ver que la corriente de desplazamiento que está relacionada con la conservación local de la carga de la carga.

Supongamos que es

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{C}$$

donde $\vec{C}$ es un vector a determinar.

Puesto que se verifica

$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{C}$$

aplicando la ecuación de continuidad de la carga en el vacío

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

se comprueba que deberá ser

$$\vec{C} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \vec{b}$$

donde $\vec{b}$ es cualquier función que verifique $\text{div } \vec{b} = 0$.

Por consideraciones de simetría de las ecuaciones, Maxwell intuyó que $\vec{b}$ debería ser nulo y, por tanto:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Las ecuaciones de conservación, como la de la carga y de la energía, están contenidas implícitamente en las leyes de las ecuaciones de Maxwell; sin embargo, dependiendo de que se considera más fundamental, si los principios de conservación o las ecuaciones de Maxwell, unos u otros son una consecuencia derivada. Veremos en teorías de causalidad, que incluso si se considera la ecuación de la conservación de la carga como la ley fundamental, con la condición adicional de que también se verifique para tiempos retardados, entonces, a partir de ella se pueden deducir todas las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. Sin embargo, incluso la conservación de la carga se puede enmarcar dentro de otras teorías más generales, y veremos con las teorías gauge, que la exigencia de la invarianza ante transformaciones de fase local de determinadas leyes físicas, lleva como consecuencia a la conservación de la carga y a determinar la estructura de las interacciones electromagnéticas.

Restricciones estructurales de la fuerza de Lorentz y de las ecuaciones cinemáticas de Maxwell como consecuencia de los principios geométricos de la dinámica clásica

Hemos visto en teorías variacionales que a partir de la lagrangiana de una carga en un campo electromagnético se deduce la fuerza de Lorentz y como debe ser el movimiento de la carga en dicho campo. Sin embargo, la estructura de la fuerza de Lorentz se debe a razones que quedaban ocultas en el análisis variacional.

A partir de simples argumentos de los corchetes de Poisson de la mecánica clásica para el movimiento de una carga eléctrica, se pueden determinar las restricciones estructurales de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, y de la fuerza de Lorentz, en la interacción de las cargas con el campo electromagnético.

Seguiremos el análisis realizado por Hughes a partir de la mecánica clásica, en vez del de Feynman-Dyson basado en las relaciones de conmutación cuánticas, ya que el primero llega a las mismas conclusiones y es por tanto más esclarecedor, teniendo en

cuenta además que el concepto de fuerza de Lorentz está vinculado con el electromagnetismo clásico.

Si suponemos que las relaciones de conmutación cuántica son universales

$$m[x^i, \dot{x}^j] = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta^{ij} \quad y \quad [x^i, x^j] = 0$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck.

Por el principio de correspondencia, en el límite de la mecánica clásica, supondremos que los correspondientes corchetes de Poisson que determinan la dinámica de una partícula cargada macroscópica verificarán las siguientes relaciones

$$m\{x^i, \dot{x}^j\} = \delta^{ij} \quad y \quad \{\dot{x}^i, x^j\} = 0$$

donde el punto indica la derivada respecto al tiempo

$$\dot{x}^j = \frac{dx^j}{dt}$$

y δ^{ij} la delta de Kronecker, en que $\delta^{ij} = 0$ si los índices son iguales, y $\delta^{ii} = 1$ si los índices son iguales.

El corchete de Poisson viene definido por

$$\{A, B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial x^k} \frac{\partial B}{\partial p^k} - \frac{\partial A}{\partial p^k} \frac{\partial B}{\partial x^k} \right)$$

siendo p^k el momento canónico.

Del primer corchete de Poisson se deduce que

$$m\{\dot{x}^i, x^j\} = \delta^{ij} \quad \Rightarrow \quad m\dot{x}^i = p^i - A^i(\vec{x}, t)$$

donde $A^i(\vec{x}, t)$ es una función vectorial que depende solo de las coordenadas, que veremos se puede identificar con el potencial vector magnético. Se supone que la carga está normalizada a la unidad.

Es importante observar que es la relajación de la condiciones de conmutación lo que permite la introducción del potencial vector A^i y que el momento mecánico clásico venga dado por $m\dot{x}^i = (p^i - A^i)$, lo que se conoce como el principio minimal.

Derivando con respecto al tiempo el último corchete, obtenemos

$$\{\dot{x}^i, \dot{x}^j\} + \{x^i, \ddot{x}^j\} = 0$$

y además se verifica

$$\{x^i, \dot{x}^j\} = -\{x^j, \dot{x}^i\}$$

Empleando la identidad de Jacobi

$$\{x^i, \{\dot{x}^j, \dot{x}^k\}\} + \{\dot{x}^j, \{\dot{x}^k, x^i\}\} + \{\dot{x}^k, \{x^i, \dot{x}^j\}\} \equiv 0$$

obtenemos

$$\{x^i, \{x^j, \dot{x}^k\}\} = \frac{\partial \{x^j, \dot{x}^k\}}{\partial p^i} \equiv 0$$

que integrada, puesto que estamos en espacio de tres dimensiones, nos da

$$\{x^j, \dot{x}^k\} = \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial p^j} = C_b \varepsilon_{kjl} B^l(\vec{x}, t)$$

siendo $\vec{B}$ un campo vectorial dependiente solo de las coordenadas, y C_b una constante que depende del sistema de unidades utilizado para $\vec{B}$.

La anterior ecuación puede a su vez integrarse obteniéndose

$$\dot{x}^k = C_e E^k + C_b \varepsilon_{kjl} \dot{x}^j B^l(\vec{x}, t)$$

donde $\vec{E}$ es otro campo vectorial de las coordenadas y C_e una constante.

En forma vectorial puede reescribir como

$$\dot{\vec{x}} = C_e \vec{E} + C_b \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}$$

Esta última ecuación es similar a la fuerza de Lorentz que actúa sobre una carga en un campo electromagnético. Es importante observar la independencia de dicha fuerza respecto de la aceleración, lo que origina que sus relaciones de conmutación no sean dependientes de las ecuaciones de movimiento

$$\{x^j, \dot{x}^k\} = \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial p^j} = \varepsilon_{kjl} C_b B^l(\vec{x}, t)$$

Invirtiendo la anterior ecuación se obtiene

$$C_b B^l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lkj} \{x^j, \dot{x}^k\} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ljk} \{\dot{x}^j, x^k\}$$

Empleando otra vez la identidad de Jacobi en la forma

$$\varepsilon_{ijk} \{x^i, \{\dot{x}^j, \dot{x}^k\}\} = 0$$

y la anterior relación deducida $m\dot{x}^i = p^i - A^i(\vec{x}, t)$, se deduce que deberá ser

$$\{x^i, B^i\} = 0$$

lo que se puede reescribir como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, que es la primera de las ecuaciones del primer par cinemático de Maxwell.

Es importante resaltar, que la ecuación de Lorentz se ha podido escribir de esa forma debido a que nuestro espacio es de tres dimensiones, pues si no $\vec{B}$ sería un tensor y las ecuaciones del electromagnetismo y también nuestro mundo, serían muy diferentes. Este hecho fue también observado por Weyl (1885-1955), quién demostró que la acción invariante mas simple de la que se pueda deducir las ecuaciones de Maxwell corresponde al espacio de tres dimensiones.

También Ehrenfest (1880-1933), demostró que solo se pueden propagar ondas electromagnéticas sin distorsión en un espacio de tres dimensiones, lo que permite que la radiación solar nos llegue de forma inalterada. Que el espacio sea de tres dimensiones, también es una condición necesaria para que exista una teoría unificada de campos, con interacciones de largo alcance con partículas sin masa como los fotones de luz.

Existe, por tanto, una relación íntima entre la existencia de las ecuaciones de Maxwell y que nuestro mundo sea de tres dimensiones.

Si derivamos respecto al tiempo la última expresión obtenida para B^i y empleamos la ecuación de la fuerza de Lorentz obtenemos

$$\begin{aligned} C_b \frac{\partial B^l}{\partial t} + C_b \dot{x}^r \frac{\partial B^l}{\partial x^r} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ljk} (\{\dot{x}^j, \dot{x}^k\} - \{\ddot{x}^k, \dot{x}^j\}) \\ &= \varepsilon_{ljk} C_e \{E^j, \dot{x}^k\} + \frac{C_b}{2} \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{irs} \{\dot{x}^r B^s, \dot{x}^k\} - \frac{C_b}{2} \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{krs} \{\dot{x}^r B^s, \dot{x}^j\} \\ &= \varepsilon_{ljk} C_e \{E^j, \dot{x}^k\} + C_b \{\dot{x}^r B^l, \dot{x}^r\} - C_b \{x^i B^r, \dot{x}^r\} \end{aligned}$$

sumando cuando hay dos índices iguales, y habiéndose hecho uso de la identidad

$$\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{jrs} = \delta_{kr} \delta_{ls} - \delta_{ks} \delta_{lr}$$

Desarrollando los corchetes de Poisson y empleando las anteriores expresiones deducidas $m\dot{x}^k = p^k - A^k(\vec{x}, t)$ y $C_b B^l = \varepsilon_{ljk} \{\dot{x}^j, \dot{x}^k\}$

obtenemos la relación

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{C_b}{C_e} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que corresponde a la otra ecuación del primer par cinemático de las ecuaciones de Maxwell para la ley de Faraday.

Este análisis no permite obtener las constantes C_e y C_b , que evidentemente deberán ser

$$C_e = C_b = \frac{q}{m}$$

Por tanto, del anterior análisis dinámico, se deduce también a que no existen fuentes o monopolos magnéticos y que el campo magnético es debido sólo a dipolos magnéticos, así como a una justificación de la ley de Faraday, basada en la forma estructural de la fuerza de Lorentz.

Históricamente, se planteaba si la fuerza de Lorentz era una ecuación adicional a las ecuaciones de Maxwell o ya estaba contenida en ellas. De los análisis de las secciones anteriores, vemos que dichas ecuaciones no son matemáticamente independientes y que, además la relación entre ellas condiciona la forma de su estructura matemática, exigiendo que dicha fuerza sea independiente de la aceleración. Vemos, por otra parte, que la fuerza que es compatible con las relaciones de conmutación de los corchetes de Poisson, es precisamente una fuerza del tipo Lorentz, como la definida en la electrodinámica clásica.

Relaciones estructurales y fuerza generalizada electromagnética de Helmholtz

Un hecho importante es que, toda ecuación de movimiento que implique una fuerza generalizada independiente de la aceleración puede ser derivada de una lagrangiana. La fuerza adopta entonces la forma de Lorentz en un campo del tipo eléctrico y magnético que satisfacen las ecuaciones de Maxwell.

Esto se puede ver fácilmente, si suponemos que la lagrangiana viene dada por

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}})^2 - V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

donde $V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ es el potencial generalizado y

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

La fuerza generalizada se puede escribir como

$$F^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial V}{\partial x^i}$$

Para que sea posible definir una formulación lagrangiana, toda fuerza generalizada debe satisfacer las ecuaciones de Helmholtz

$$\frac{\partial F^i}{\partial \ddot{x}^j} = \frac{\partial F^j}{\partial \ddot{x}^i}$$

$$\frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} \right)$$

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j} - \frac{\partial F^j}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial F^j}{\partial \dot{x}^i} \right)$$

Para que además, una fuerza generalizada sea independiente de la aceleración, la segunda condición establece que

$$\frac{\partial^2 F^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} = 0$$

que integrando se obtiene

$$\frac{\partial F^i}{\partial \dot{x}^j} = \epsilon_{ijk} C_b B^k(\vec{x}, t)$$

y volviendo a integrar

$$F^i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = qE^i + \epsilon_{ijk} \dot{x}^j qB^k(\vec{x}, t)$$

donde q aquí es solo una constante arbitraria, que más tarde se identificara con la carga

De la tercera identidad de Helmholtz, se deduce que

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)^k + \dot{x}^k \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Debido a la independencia de coordenadas y velocidades, se obtiene las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

que son las condiciones a su vez para la existencia de un potencial escalar eléctrico y un potencial vector magnético.

Por otra parte, la fuerza generalizada será independiente de la aceleración si el potencial verifica la condición

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = 0$$

Los significados del campo electromagnético

que integrada, nos lleva a una expresión de la forma

$$V(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \phi(\vec{x}, t) - \dot{x}^i A^i(\vec{x}, t)$$

de manera que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

De acuerdo con la teoría mecánica de Hamilton, si existe un hamiltoniano $H(x^i, p^i)$ las ecuaciones de movimientos vendrán dadas por

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{1}{m} (p^i - qA^i(\vec{x}, t)) \quad \text{y} \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

Integrando la primera de ellas obtenemos

$$H = \frac{1}{2m} (p^i - qA^i(\vec{x}, t))^2 + q\phi(\vec{x}, t)$$

La lagrangiana del sistema vendrá entonces dada por

$$L(x^i, \dot{x}^i) \equiv p^i \dot{x}^i - H = \frac{m}{2} (\dot{x})^2 - q\phi(\vec{x}, t) + q\dot{x}^i A^i(\vec{x}, t)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que definen el movimiento vendrán serán

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

que conducen a la ecuación de tipo Lorentz

$$m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} + q\dot{\vec{v}} \wedge \vec{B}$$

siendo

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad \text{y} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

lo que nos lleva otra vez a las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Era de esperar obtener los mismos resultados que en el apartado anterior, ya que es bien sabido que la mecánica de los corchetes de Poisson es equivalente a la mecánica de Lagrange y de Hamilton, y las relaciones de conmutación de los corchetes de Poisson están determinadas por las ecuaciones de movimiento y se conservan en las trayectorias reales.

Aunque los anteriores argumentos adolecen de una cierta circularidad, arrojan sin embargo cierta luz sobre las restricciones a la forma a que se deben someter las fuerzas cuando se fijan las relaciones de conmutación.

En el modelo desarrollado en este apartado, al igual que en el anterior, q es solo una constante dimensional de la que no se puede extraer ningún significado físico.

Relaciones estructurales debidas a fuerzas generalizadas conservativas de Lipschitz

Todo lo anterior, también puede verse a partir de la fuerza Lipschitz (1881) en respuesta a la pregunta del Helmholtz de qué tipo de fuerzas son las que conservan la energía de un sistema mecánico.

Consideramos una partícula clásica en un potencial dependiente de la velocidad $V(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Su lagrangiana vendrá dada por

$$L = \frac{m_0}{2} \vec{v}^2 - V(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

Si desarrollamos el potencial en series de potencias de $\vec{v}$, obtendríamos una expresión del tipo

$$V(\vec{x}, \vec{v}, t) \approx V_0(\vec{x}, t) + \vec{V}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\bar{V}}_2 \cdot \vec{v} + \dots$$

donde por $\vec{v} \cdot \vec{\bar{V}}_2 \cdot \vec{v}$ representamos la diada

$$\vec{v} \cdot \vec{\bar{V}}_2 \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} v^i V_2^{ij} v^j$$

Según la mecánica clásica, la fuerza generalizada vendrá dada por

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = -\vec{\nabla} V_0 - \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_1 + \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\bar{V}}_2 \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{\bar{V}}_2}{\partial t} \cdot \vec{v}$$

La fuerza generalizada será del tipo

$$\vec{F} = \vec{F}_1(\vec{x}, t) + \vec{v} \wedge \vec{F}_2(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

si identificamos

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{x}, t) &= -\vec{\nabla} V_0 + \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} \\ \vec{F}_2(\vec{x}, \vec{v}, t) &= -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_1 \\ \vec{\bar{V}}_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

y se cumplen las condiciones de compatibilidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 = 0 \quad y$$

$$\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_1$$

A $\vec{F}_2$ se le conoce como una fuerza de tipo Lipschitz, y es una fuerza conservativa ya que $\vec{F}_2 \cdot \vec{v} \equiv 0$.

Si denominamos

$$q\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{V}_1 \quad y \quad q\phi \stackrel{\text{def}}{=} V_0$$

se puede describir $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ como

$$\vec{F}_1 = q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\vec{\nabla} \phi = q\vec{E} \quad \vec{F}_2 = q\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv q\vec{B}$$

La fuerza generalizada conservativa adoptaría entonces la expresión de la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

y las ecuaciones de compatibilidad son equivalentes a las ecuaciones cinemáticas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv 0 \quad y \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

El momento canónico será

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} + \vec{V}_1 = m_0 \vec{v} + q\vec{A}$$

con lo que la hamiltoniana será

$$H(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} + \vec{V}_1)^2 + V_0 = \frac{1}{2m_0} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

y la lagrangiana

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{m_0}{2} \vec{v}^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - q\phi(\vec{x}, t)$$

Puesto que hay cuatro ecuaciones de compatibilidad y seis incógnitas $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ o $\vec{E}, \vec{B}$, esto origina que los potenciales no sean únicos y que exista unas transformaciones gauge de los potenciales que deja invariantes las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ o en su caso a $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

Relaciones estructurales matriciales de las ecuaciones de Maxwell

Por simple inspección, las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial presentan una interesante relación interna entre las componentes del campo eléctrico y magnético que observó Sommerfeld, que indica la posibilidad de relaciones más profundas.

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío vienen dadas por

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Primer par cinemático} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{\vec{J}}{c^2 \epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Segundo par dinámico} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 & & & \text{Conservación de la carga}\end{aligned}$$

Aunque ya hemos visto, la conservación de la carga está contenida implícitamente en las ecuaciones de Maxwell y no es una ecuación independiente de estas.

Si definimos el producto geométrico de dos vectores por

$$\begin{aligned}\vec{A} \circ \vec{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{A} \wedge \vec{B} \\ \vec{\nabla} \circ \vec{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + i \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + i \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

Con estas definiciones, las ecuaciones de Maxwell pueden reagruparse de la forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \circ \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} - i \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \circ \vec{B} &= i \frac{\vec{J}}{c^2 \epsilon_0} + \frac{i}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Si definimos un nuevo vector complejo

$$\vec{G} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} + ic\vec{B}$$

entonces las ecuaciones de Maxwell se reducen a la expresión

$$\vec{\nabla} \circ \vec{G} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{G} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho - \frac{\vec{J}}{c} \right)$$

Si definimos por $\vec{G}^*$ el complejo conjugado de $\vec{G}$, entonces se verificará

$$\frac{\epsilon_0}{2} \vec{G} \circ \vec{G}^* = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{G} \cdot \vec{G}^* + i \vec{G} \wedge \vec{G}^*) = \frac{\epsilon_0}{2} (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) + \epsilon_0 c^2 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Los significados del campo electromagnético

donde el primer término representa densidad de energía y el segundo el flujo de energía (vector Poynting).

El que aparezca asociados la energía del campo por unidad de volumen y un flujo de energía por unidad de área y tiempo sugiere la posibilidad de que, en la realidad, se encuentren ligados a través de una ecuación de continuidad local de la energía.

Esto indica que debe existir algún tipo de conexión entre los campos y que, además, las ecuaciones de conservación deben ser de tipo local.

Si definimos ahora los cuadvectores

$$\vec{G} = G^\alpha = (G_0, \vec{G}) = (0, \vec{E} + ic\vec{B})$$

$$x^\alpha = (\vec{x}, ix_0) = (\vec{x}, ict)$$

entonces las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir en la forma matricial

$$\beta^\alpha \partial_\alpha G^\beta = \frac{1}{c\epsilon_0} J^\beta$$

siendo las β^μ matrices hermitianas 4×4 que verifican:

$$\beta^\mu \beta^\mu = 1$$

$$\beta^i \beta^j = \delta_{ij} - i[\epsilon_{ijk}] \beta^k$$

$$\beta^0 \beta^\mu = \beta^\mu \beta^0$$

donde $[\epsilon_{ijk}]$ significa el signo de una permutación cíclica

que en función de las matrices de Pauli se escriben explícitamente como

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & +\sigma^2 \end{pmatrix} \quad \beta^2 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tienen las propiedades

$$\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} + i[\epsilon_{ijk}] \sigma^k$$

$$\sigma^{i-1} = \sigma^{i*}$$

$$\vec{\sigma} \wedge \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$$

Mediante una transformación de semejanza

$$H^\beta = \bar{S}^{-1} H^\beta \bar{S}$$

siendo

$$\bar{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es posible separar las ecuaciones de Maxwell matriciales en dos partes denominadas ecuaciones de Kammer para el electromagnetismo.

$$\beta^{\mu} \partial_{\mu} G^{\alpha} = -\frac{1}{c\epsilon_0} J^{\alpha}$$

Relaciones estructurales por formas diferenciales externas de las ecuaciones de Maxwell

Las formas exteriores desarrolladas por Cartan aportan una formulación compacta alternativa de las ecuaciones del electromagnetismo y de sus relaciones estructurales.

En el espacio tridimensional, se definen las siguientes formas diferenciales de primer y segundo orden

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &\equiv E_i dx^i = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3 \\ \mathcal{D}_1 &\equiv D_i dx^i = D_1 dx^1 + D_2 dx^2 + D_3 dx^3 \\ \mathcal{B}_2 &\equiv B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ \mathcal{H}_2 &\equiv H_3 dx^1 \wedge dx^2 + H_1 dx^2 \wedge dx^3 + H_2 dx^3 \wedge dx^1 \end{aligned}$$

donde E_i , B_i son las componentes del campo eléctrico y magnético, y

$$dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$$

es el producto exterior.

Antes de proseguir, es necesario recordar algunos teoremas básicos sobre formas diferenciales.

Si ω es una forma diferencial de orden p , se define por su derivada externa a la operación

$$d\omega = dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^i}$$

que da como resultado una forma diferencial de orden $p + 1$. Además se verifica la relación

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$$

siendo p el orden de ω .

Se demuestra de acuerdo con el teorema de Poincaré, que si ω es una forma diferencial de orden p y $d\omega = 0$, entonces existe una forma diferencial θ de orden $p - 1$, tal que se verifica que $\omega = d\theta$. El teorema inverso también se verifica.

En tres dimensiones se demuestra que las componentes de la derivada externa de una forma diferencial de primer orden de un campo vectorial, son las componentes del rotacional de dicho campo vectorial.

La diferencial externa de una forma de segundo orden de un campo vectorial es la divergencia de dicho campo vectorial. La segunda derivada externa de una forma diferencial es siempre cero $dd\omega \equiv 0$.

Otro teorema importante es el de Stokes, que dice que si ω es una forma diferencial de orden p que integramos sobre una variedad Ω de $p + 1$ dimensiones limitada por una frontera $\partial\Omega$, se verifica entonces

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

Se demuestra que para $p = 1, 2$, en el espacio tridimensional, el teorema se reduce a los teoremas vectoriales de Stokes y de Gauss.

De acuerdo con los teoremas expuestos

$$d\mathfrak{E}_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$d\mathfrak{B}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Emplearemos la notación de un espacio cuatridimensional

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

Se definen las formas de segundo orden $\mathfrak{F}_2 = +\mathfrak{E}_1 \wedge dx^0 + c\mathfrak{B}_2$ y su forma dual $\mathfrak{F}_2^*$, que toman la expresión desarrollada

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2 &= -E_i dx^0 \wedge dx^i + cB_1 dx^2 \wedge dx^3 + cB_3 dx^1 \wedge dx^2 + cB_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ \mathfrak{F}_2^* &= +cB_1 dx^0 \wedge dx^i + E_i dx^2 \wedge dx^3 + E_3 dx^1 \wedge dx^2 + E_2 dx^3 \wedge dx^1 \end{aligned}$$

Utilizaremos el convenio que define $(-E_i) = (E^i) = \vec{E}$ y $(-B_i) = (B^i) = \vec{B}$

El que se anulen sus derivadas externas es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} d\mathfrak{F}_2 = 0 & \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad y \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ d\mathfrak{F}_2^* = 0 & \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = +\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad y \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

que se corresponden a las ecuaciones de Maxwell en el vacío, sin fuentes de cargas y corrientes.

Obsérvese que $\mathfrak{F}_2$ coincide con el tensor electromagnético

$$\mathfrak{F}_2 = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad \alpha < \beta$$

y que su dual

$$\mathfrak{F}_2^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} F^{\mu\sigma} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

Es importante observar que $d\mathfrak{F}_2$ se puede escribir de la forma

$$d\mathfrak{F}_2 = \left(d\mathfrak{C}_1 + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial x^0} \right) \wedge dx^0 + d\mathfrak{B}_2$$

que es la suma de dos formas diferenciales independientes.

Si es $d\mathfrak{B}_2 = 0$ ($\text{div } \vec{B} = 0$) en cualquier sistema de coordenadas inercial, entonces deberá ser también $d\mathfrak{C}_1 + \partial \mathfrak{B}_2 / \partial x^0 = 0$ ($\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$), en cualquier sistema de coordenadas para que sea $d\mathfrak{F}_2 \equiv 0$.

Se define una nueva forma diferencial de primer orden con las componentes del potencial eléctrico y vectorial magnético

$$\mathfrak{A}_1 = \mathcal{A}_\alpha dx^\alpha = \phi dx^0 + c A_i dx^i = \phi dx^0 - c A^i x^i$$

Siéndolos potenciales vectores $\mathcal{A}_\alpha = (\phi, -c\vec{A})$ y $A^\alpha = (\phi, c\vec{A})$

Por el teorema de Poincaré, si $d\delta = 0$ entonces existe una forma diferencial tal que $\delta = d\lambda$, por lo que si hacemos

$$d\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{F}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad y \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La anterior igualdad define, por tanto, la relación de los potenciales con las componentes del campo electromagnético con formas diferenciales.

Si no tenemos fuentes, podemos definir otra forma diferencial de primer orden

$$\mathfrak{C}_1 = C_\alpha dx^\alpha = \psi dx^0 - c C_i dx^i$$

Haciendo $d\mathfrak{F}_2^* = 0$, por el teorema de Poincaré existirá una forma diferencial de primer orden tal que $\mathfrak{F}_2^* = d\mathfrak{C}_1$, por la que se cumple la relación

$$d\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{F}_2^* \Leftrightarrow c\vec{B} = -\vec{\nabla}\psi - \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \quad y \quad \vec{E} = -c\vec{\nabla} \wedge \vec{C}$$

que son las ecuaciones del electromagnetismo en función del potencial magnético en el caso de ausencia de fuentes.

Todo lo anterior se puede generalizar para incluir fuentes de cargas y corrientes.

Definamos ahora las siguientes formas diferenciales de tercer orden, que se relacionan con las cargas y las corrientes

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= J_\alpha dx^\alpha = c\rho dx^0 - J_i dx^i \\ \mathfrak{J}_3^* &= c\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - J_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - J_2 dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - J_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

Entonces, las siguientes formas diferenciales definen las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\begin{aligned} d\mathfrak{F}_2^* &= \frac{1}{c\varepsilon_0} \mathfrak{J}_3^* \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \vec{J} \quad y \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ d\mathfrak{F}_2 &= 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad y \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

Además se verificará

$$dd\mathfrak{F}_2^* \equiv 0 \Rightarrow d\mathfrak{J}_3^* \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0$$

que corresponde al principio de continuidad local de cargas y corrientes.

Puesto que $d\mathfrak{J}_3^*$ es una forma de cuarto orden, la ecuación de conservación es un invariante.

De igual forma se definen las formas diferenciales

$$\mathfrak{G}_2 = c\mathcal{D}_1 \wedge dx^0 + \mathfrak{H}_2$$

y su forma dual $\mathfrak{G}_2^*$ que toman la expresión desarrollada

$$\mathfrak{G}_2 = -c\mathcal{D}_i dx^0 \wedge dx^i + H_1 dx^2 \wedge dx^3 + H_3 dx^1 \wedge dx^2 + H_2 dx^3 \wedge dx^1$$

$$\mathfrak{G}_2^* = +H_i x^0 \wedge dx^i + c\mathcal{D}_1 dx^2 \wedge dx^3 + c\mathcal{D}_3 dx^1 \wedge dx^2 + c\mathcal{D}_2 dx^3 \wedge dx^1$$

Entonces

$$d\mathfrak{G}_2^* = \frac{1}{c}\mathfrak{I}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Puesto que $dd\mathfrak{I}_2^*$ es una forma nula invariante de cuarto orden, por el teorema de Stokes se verificará

$$0 = \int_{\Omega_4} dd\mathfrak{I}_2^* = \int_{\partial\Omega_4} d\mathfrak{I}_2^*$$

Tomando como volumen Ω_4 un cilindro cuyo eje sea $x^0 = ct$ limitado entre los planos $t = t_1$ y $t = t_2$, cuyo radio lo hacemos tender al infinito, se verificará entonces

$$\int_{V, t_1} d\mathfrak{I}_2^* = \int_{V, t_2} d\mathfrak{I}_2^* \Rightarrow \int_{V_\infty} \rho dV = 0$$

que nos indica que la carga eléctrica total se conserva.

Obsérvese también que las siguientes formas diferenciales de cuarto orden que invariantes relativistas

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_2 \wedge \mathfrak{I}_2^* &= -(\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ \mathfrak{I} \wedge \mathfrak{I}_2 &= -(c\vec{E} \cdot \vec{B}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ \mathfrak{I}_2^* \wedge \mathfrak{I}_2^* &= +(c\vec{E} \cdot \vec{B}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

221

Que $(\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2)$ y $\vec{E} \cdot \vec{B}$ son los únicos invariantes relativistas que se pueden formar con las componentes del campo eléctrico y magnético es bien conocido por la teoría de relatividad. Pero aquí se ha deducido directamente a partir de formas diferenciales para el campo electromagnético, así como la conservación de la carga.

Recordemos que $(\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2)$ es proporcional a la densidad de lagrangiana del campo electromagnético.

Otra forma de cuarto orden y por tanto un invariante de Lorentz, se obtiene de la expresión

$$\frac{1}{c} \mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{I}_1^* = (\rho\phi - \vec{A} \cdot \vec{J}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

que representa la energía de interacción de las cargas y corrientes en el campo electromagnético.

Los significados del campo electromagnético

De lo anterior se deduce que la densidad lagrangiana del campo electromagnético se puede escribir de la forma diferencial

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{F}_2 \wedge \mathfrak{F}_2^* - \frac{1}{c} \mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{F}_3^* = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathfrak{F}_2 \wedge \mathfrak{F}_2^* - \epsilon_0 \mathfrak{A}_1 \wedge d\mathfrak{F}_2^*$$

Que la lagrangiana sea una forma diferencial de cuarto orden, nos indica que es un invariante relativista ante una transformación de Lorentz.

Si definimos la forma

$$\mathfrak{E}_1 = -cE_i A_i dx^0 + \phi E_i dx^i$$

y su dual

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_3^* &= cE_i A_i dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \phi E_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\ &+ \phi E_2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \phi E_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

Entonces se verifica

$$d\mathfrak{E}_3^* \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{E} \cdot \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{E}) = (c^2 \vec{B}^2 - \vec{E}^2) + \frac{1}{\epsilon_0} (\rho \phi - \vec{j} \cdot \vec{A}) - c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$d\mathfrak{E}_3^* = \mathfrak{F}_2 \wedge \mathfrak{F}_2^* + \frac{1}{c\epsilon_0} \mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{F}_3^* = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathcal{L}_{em} + \frac{1}{2} \mathfrak{F}_2 \wedge \mathfrak{F}_2^*$$

Aunque para la construcción de las formas diferenciales se ha seguido un proceso invertido a partir de las ecuaciones de Maxwell, sin embargo, una vez definidas, es la propia estructura del formalismo matemático, la que define la estructura interna de las ecuaciones de Maxwell y genera de una forma directa las ecuaciones de conservación y los invariantes de Lorentz.

Representaciones duales de las ecuaciones cinemáticas

Hemos visto que toda forma diferencial de orden p en un espacio de 4 dimensiones, tiene siempre asociada una forma diferencial de orden $4-p$ cuya base es complementaria a la complementaria.

Consideremos un tensor de orden 2 antisimétrico como el electromagnético. Su forma diferencial vimos que venía dada por

$$\mathfrak{F}_2 = \mathcal{F}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad \alpha < \beta$$

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\xi} g^{\eta\eta} F_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

Su forma dual, que también es un tensor, se puede representar también como

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{F}^{\gamma\delta}$$

Esto es equivalente en la representación matricial en función de las variables del campo electromagnético a hacer los cambios

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha\beta}^* \Rightarrow \vec{E} \rightarrow -c\vec{B} \quad c\vec{B} \rightarrow \vec{E}$$

223

Los tensores antisimétricos, como el tensor electromagnético, tienen una serie de propiedades unas propiedades que conviene destacar.

Puesto que en el vacío se verifica la identidad

$$\text{div}_\alpha \{ \mathcal{F}^{\alpha\beta} \} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{F}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \equiv 0$$

existe siempre un campo vectorial A^α tal que

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \text{rot}_{\alpha\beta} \{ \mathcal{A}_\mu \} \equiv \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial x^\beta}$$

Se verifican además las identidades para un tensor antisimétrico

$$\text{rot}_{\alpha\beta\gamma} \{ \mathcal{F}_{\alpha\beta} \} = \frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} \equiv 0$$

donde $\alpha\beta\gamma\delta$ es una permutación cíclica de los índices 1234.

Esta identidad, como ya hemos visto, es equivalente a las dos ecuaciones cinemáticas de Maxwell de la ley de Faraday y de ausencia de polos magnéticos.

Se comprueba que $\text{rot}_{\alpha\beta\gamma} \{ \mathcal{F}_{\alpha\beta} \}$ y $\text{div}_\alpha \{ \mathcal{F}_{\alpha\beta}^ \}$ son tensores duales uno del otro.*

$$\operatorname{div}_\alpha \{F^{*\alpha\beta}\} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} \right)$$

Esto también se puede en el caso particular del tensor electromagnético que $\operatorname{div}_\alpha \{F_{\alpha\beta}^*\}$ es equivalente a la forma diferencial $d\mathfrak{F}_2$.

Para un tensor antisimétrico se verificará

$$\operatorname{div}_\alpha \{F_{\alpha\beta}^*\} \equiv 0$$

Por tanto, las ecuaciones cinemáticas de Maxwell son una consecuencia directa de las propiedades de antisimetría del tensor electromagnético que es el determina el campo electromagnético.

